קיום קבוצה מקסימלית

A היא מקסימלית אסם לכל קבוצה נל"ח W $A \cup W \setminus A$ סופית או ש- $\overline{A \cup W}$ סופית, ובמילים אחרות $\overline{W} \subseteq^* \overline{A}$ או $W \subseteq^* \overline{A}$, היכן ש- $\mathbf{B} \subseteq^* \mathbf{A}$ מוגדר כ- "$A \setminus B$ היא סופית". לכן עלינו לבנות את A כך שלכל n $\overline{W_n} \subseteq^* \overline{A}$ או $\overline{A} \subseteq^* W_n$.

תחילה נדגים את מה שנעשה בהמשך ע"י בניה פשוטה מאוד. התאור של בניה זאת יהיה כבד מן הדרוש לצורך בניה זאת, כי התאור משמש כהדגמה לבניה המסובכת יותר הדרושה להוכחת המשפט. נבנה את A כך ש- $\overline{W_0} \subseteq^* \overline{A}$ או $W_0 \subseteq^* \overline{A}$. הרעיון הוא לנסות להביא לכך שכל איברי $\overline{A}$ יהיו ב-W_0 ולשם כך נכניס את האיברים שאינם ב-W_0, ואפילו אם נראה לנו זמנית שאינם ב-W_0, לתוך A. בתהליך בניית A יהיה לנו ענין לעקוב אחרי האיבר ה-n של $\overline{A}$ בשלבים שונים של התהליך גם אם בינתיים השתנתה זהותו של איבר זה כי הכנסנו איברים קודמים של $\overline{A}$ ל-A. לכן נדמיין **סמנים** $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots$ שבכל שלב של התהליך מוצבים, לפי הסדר, על המספרים שבשלב זה לא הוכנסו ל-A. את המקום של Γ_i בתחילת השלב ה-s נסמן ב-$\mathbf{a_i^s}$. המצב ההתחלתי הוא ש- $A = \emptyset$, ולכן $a_i^0 = i$ לכל i. נתחיל לחשב את איברי W_0 עד שנמצא, אם נמצא, בשלב s מספר a ראשון כך ש- $a \in W_{0,s}$ ולכן $a \in W_0$. כעת נזיז את הסמן Γ_0 ל-a, שיהיה כעת a_0^{s+1}, וזה אומר שאת כל המספרים הקטנים מ-a, שאיננו יודעים שהם ב-W_0, אנו מכניסים ל-A. את הסמנים מ-Γ_1 ואילך נזיז כמתבקש מהזזת Γ_0, כלומר את Γ_i נזיז ל-$a+i$. נקרא לפעולה זאת בשם טיפול ב-Γ_0. בשלבים s הבאים נחפש מספר נוסף, a_0^s, שהוא ב-$W_{0,s}$, ואם נמצא כזה נזיז אליו את הסמן Γ_1, כלומר מספר זה יהיה a_1^{s+1}, ואז ברור כי $a_1^{s+1} \in W_0$, ואת כל המספרים בין a_0^s ל- a_1^{s+1} נכניס ל-A, והסמן Γ_i, ל-$i > 1$, יזוז, כמתבקש, ל- $a_1^{s+1} + i - 1$. את כל המספרים שבין a_0^s שבין a_1^{s+1} נכניס ל-A, וזהו הטיפול ב-Γ_1. כך נמשיך ונטפל ב-Γ_2, אחריו ב-Γ_3 וכן הלאה, כל עוד נמצא מספר גדול מ-a_n^s הנמצא ב-$W_{0,s}$. נשים לב שהסמן Γ_0 זז לכל היותר פעם אחת, הסמן Γ_1 זז לכל היתר פעמיים, פעם אחת בעקבות הטיפול ב-Γ_0 ופעם שניה בעיקבות הטיפול ב-Γ_1. בדומה, לכל $i > 1$ הסמן Γ_i זז לכל היותר $i+1$ פעמים. כך לכל i, משלב מסויים ואילך הסמן Γ_i נמצא על a_i^s שאינו משתנה עם s. נסמן את a_i^s זה, שהוא $\lim_s a_i^s$, ב-a_i ונאמר ש-Γ_i מתייצב על מספר זה. a_i זה אינו מוכנס ל-A בשום שלב של התהליך. לעומת זאת כל מספר שבשלב מסויים נשאר ללא סמן, כלומר כל מספר שאינו אחד ה-a_i-ים מוכנס ל-A בשלב בו יורד הסמן מן המספר. לכן איברי $\overline{A}$ הם בדיוק המספרים a_i. אם $i < j$ אז עבור s מספיק גדול $a_i = a_i^s < a_j^s = a_j$, ולכן הסידרה $a_0, a_1, \ldots$ מונה את איברי $\overline{A}$ לפי הסדר.

קיימות שתי האפשרויות הבאות:

האפשרות הראשונה היא שתהליך בנית A נמשך עד אינסוף, כלומר, לכל n נעשה טיפול ב-Γ_n ואז Γ_n מתייצב ו- $a_n \in W_0$, וכך $\overline{A} \subseteq W_0$.

האפשרות השניה היא שקבלנו את $a_0, \ldots, a_{n-1}$, עם $n \geq 0$, וכאשר אנו ממשיכים בשלבים s עד אינסוף לא קיימים s ו-$a > a_{n-1}$ כך ש- $a \in W_{0,s}$. זה אומר שאף $a > a_{n-1}$ אינו ב-W_0. במשך כל התהליך הוכנסו ל-A בדיוק איברי הקבוצה הסופית $\{k \mid k < a_{n-1}\} \setminus \{a_0, \ldots, a_{n-2}\}$ ולכן $\overline{A} = \{k \mid k > a_{n-1}\} \cup \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ וקיים $\overline{W_0} \subseteq \{k \mid k > a_{n-1}\}$ $\overline{A} \subseteq^* \{k \mid k > a_{n-1}\}$.

נשים לב שבשום שלב של התהליך איננו יודעים איזו משתי האפשרויות תקרה בסוף.

כעת ניגש לטיפול בהוכחת המשפט. כמו לעיל נשתמש בסמנים $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots$ המוצבים בכל שלב של התהליך על המספרים שבשלב זה לא הוכנסו ל-A, לפי הסדר, ואת המקום של Γ_i בתחילת השלב ה-s נסמן ב-$\mathbf{a_i^s}$. בהינתן מספר x נרצה לדעת באילו קבוצות W_i הוא נמצא ובאילו אינו נמצא. לכן נכנה בשם **מצב n של x** את ה-$n+1$-יה של ערכי האמת של $x \in W_0, \ldots, x \in W_n$. מצב n של x לא ידוע לנו בשלבי התהליך כי הקבוצות W_i אינן ידועות לנו בשלמותן, ולכן נדבר על **מצב n של x בשלב s** שהוא מצב n של x מחושב לפי הקבוצות $W_{0,s}, \ldots, W_{n,s}$. המצבים השונים הם סדרות סופיות של ערכי אמת ואנו

מסדרים סדרות אלו בסדר מילוני כאשר $F < T$.

ניגש עתה לתהליך הבניה. המצב ההתחלתי הוא ש- $A = \emptyset$, ולכן $a_i^0 = i$ לכל i.

בשלב s נקח את ה-n המזערי שעבורו קיים j כך שמצב n של a_j^s בשלב s גדול, בסדר המילוני של המצבים, ממצב a_n^s של n בשלב זה, ונקח את ה-j המזערי הזה. כעת נזיז את הסמן G_n ל-a_j^s, שיהיה כעת a_n^{s+1}, וזה אומר שאת כל המספרים הקטנים שבקטע $[a_n^s, a_j^s)$ (כלומר בקבוצה $\{t \mid a_n^s \leq t < a_j^s\}$) אנו מכניסים ל-$A$. את הסמנים מ-$\Gamma_{n+1}$ ואילך נזיז כמתבקש מהזזת Γ_n, כלומר אם $i > n$ נזיז את Γ_i ל- a_{i+j-n}^s. אנו קוראים לפעולה זאת בשם **טיפול ב-Γ_n**. הרעיון שלה הוא לדאוג לכך שמצב n של המספר עליו נמצא Γ יהיה גדול ככל האפשר.

למה 1. כל סמן Γ_n זז רק מספר סופי של פעמים.

הוכחה. נוכיח את הלמה באינדוקציה על n ונניח, כהנחת האינדוקציה, כי לכל $i < n$ Γ_i זז רק מספר סופי של פעמים. יהי לכן s שלב שממנו ואילך אף סמן Γ_i, עם $i < n$, אינו זז. לכן משלב זה ואילך Γ_n זז רק כאשר הוא מטופל. בכל טיפול ב-Γ_n עובר סמן זה ממספר למספר בעל מצב n גדול ממנו. גם כאשר סמן Γ_n נמצא על מספר a_n^s ואינו זז מצב n שלו יכול להשתנות מכיוון שבשלב מסויים מתברר כי a_n^s נמצא בקבוצה W_i מסויימת עם $i \leq n$ ולכן רכיב i במצב n של a_n^s נהפך מ-F ל-T, אבל זהו שוב שינוי המגדיל את המצב. מכיוון שיש רק 2^{n+1} מצבי n לכן מספר הטיפולים ב-Γ_n הוא לכל היותר $2^{n+1} - 1$ ולכן Γ_n זז אחרי השלב s לכל היותר $2^{n+1} - 1$ פעמים, ובסך הכל מספר סופי של פעמים.

מכיוון שהסמן Γ_n זז רק מספר סופי של פעמים אז החל מ-s_0 מסויים a_n^s קבוע ואת הערך הקבוע הזה, שהוא $\lim_s a_n^s$ אנו מסמנים ב-a_n, וכמו לעיל איברי $\overline{A}$ הם, לפי הסדר, $a_0, a_1, \ldots$, וזאת קבוצה אינסופית, כנדרש. לפי למה 3 שבהמשך סידרת מצבי n של המספרים $a_n, a_{n+1}, \ldots$ היא סידרה יורדת חלש. מכיון שמספר מצבי n הוא סופי לכן קיים m כך שכל מצבי n של a_i, עבור $i \geq m$ שווים כולם. זה אומר כי עבור ערך אמת v מסויים לכל $i \geq m$ הרכיב ה-n של מצב n של a_i הוא v. אם v זה הוא T אז קיים לכל $i \geq m$ $a_i \in W_n$ ו- $\overline{A} \subseteq^* W_n$. אם v זה הוא F אז קיים לכל $i \geq m$ $a_m \in \overline{W_n}$ ו- $\overline{A} \subseteq^* \overline{W_n}$, ואת זה היינו צריכים להוכיח.

למה 2. מצב n של a_n גדול או שווה ממצב n של כל a_j עם $j > n$.

הוכחה. יהי s שלב שבו כבר התייצבו כל ה-a_i עם $i \leq j$, ולכן $a_n^s = a_n$ ו- $a_j^s = a_j$, ובו גם התייצבו מצבי n של a_i אלו. אילו מצב n של a_j היה גדול מזה של a_n אז אי שוויון זה היה קיים למצבי n באותו שלב, ואז היה Γ_n, או איזשהו Γ_m עם $m < n$, מטופל בשלב זה, בניגוד להנחתנו שכל ה-a_i עם $i \leq j$ כבר התייצבו בשלב זה.

למה 3. לכל n, סידרת מצבי n של המספרים $a_n, a_{n+1}, \ldots$ היא סידרה יורדת חלש.

הוכחה: נניח כי קיימים $n < p < q$ כך שמצב n של a_q גדול מזה של a_p. היות ו- $p > n$ לכן מצבי p של מספרים הם המשכות של מצבי n שלהם, ולכן גם מצב p של a_q גדול מזה של a_p, בעוד שלפי למה 2 מצב p של a_p גדול או שווה למצב p של a_j לכל $j > p$.